PS2315 Abril-Julio 2016
Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar
Tarea 3

.

- Leer Kamen y Heck: Secciones 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 7.1, 7.2, 7.3

Nota: con la lectura las secciones del cap. 6 y 7 del libro anterior, se busca: a) Observar las grandes similitudes entre las transformadas de Laplace y Z (para justificar nuestra metodología generalizada b) b) Detectar las pequeñas diferencias entra las transformadas bilaterales y las unilaterales de Laplace y Z respectivamente, c) resolver todo ejemplo que presente el libro en Matlab pero Scilab (este último es software libre y hace casí lo mismo que Matlab)

- Fecha de entrega: jueves 5 de mayo, al entrar a clases..
- Nota: i) Cada tarea debe estar plenamente identificada con Nombre, Apellido y Carnet.. ii) en cada problema debe mostrarse tanto su enunciado como su solución, ambas bien redactadas y nítidamente presentadas. iii) las tareas son individuales (pueden discutir entre ustedes las soluciones; sin embargo, no se aceptarán soluciones o argumentos "idénticos"). Violación a esta regla implicará NOTA CERO a todos los involucrados sin derecho a reclamo alguno. iv) Todos los problemas de la 2da parte (que implican uso de Scilab) son obligatorios (de lo contrario tendrán CERO en la tarea).

1. Suponga que si para una señal $f \in S_e$ (T genérico) la transformada generalizada de Laplace
$$L_g\{f\} = \widehat{f}(\gamma) = \oint_{\lambda \in T} f(\lambda)\, e^{-\gamma\lambda} \mu(\lambda)$$
existe y es conocida, demuestre que la transformada generalizada de Laplace de $f(\alpha\lambda)$, $\alpha \in R_+$, para todo $\lambda \in T$, es
$$L_g\{f(\alpha\lambda)\} = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

2. **Obligatorio cada una de sus partes**. (El objetivo de este ejercicio consiste en adiestrar al estudiante en el manejo de Transformadas de Laplace y comenzar a correlacionar propiedades temporales con las propiedades frecuenciales de una señal dada)

   (a) Determine la transforma de Laplace de la señal de tiempo contínuo
$$y(t) = \left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right\} esc(t)$$
   y exprésela de una forma compacta como una función racional en s, o sea$\widehat{y}(s) = \frac{N_y(s)}{D_y(s)}$

(b) Grafique la señal $y(t)$ versus t, y construya el correspondiente diagrama de polos-ceros para cuando

1. $\xi = 0$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg
2. $\xi = 0.1$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg
3. $\xi = 0.4$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg
4. $\xi = 0.8$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg
5. $\xi = 1$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg
6. $\xi = 2$ y $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/seg

Concluya. (Use Scilab para las gráficas que deben presentarse en un sólo dibujo)

(c) Determine la transformada de Laplace de la derivada de $y(t)$ (sin derivar $y(t)$) y halle mediante propiedades y tablas a $\frac{d}{dt}y(t)$.

(d) Use el resultado anterior para determinar (en aquellos casos donde sea posible) el tiempo en el cual ocurre el máximo valor de $y(t)$ y el instante t_p en el cual este ocurre. O sea,

$$y_{\max} = |y(t_p)|$$

Revise sus resultados y correlaciónelos con los obtenidos en la parte (b).

3. Determinar la transformada bikateral de Laplace de la comvolución de las siguientes parejas de señales:

(a) $f(t) = rect_2(t)$, $g(t) = -\frac{1}{2}rec_1t\left(t+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}rect_2\left(t-\frac{1}{2}\right)$

(b) $f(t) = 2rect_1\left(t+\frac{1}{2}\right) + \delta(t-2)$, $g(t) = rect_2(t)$

(c) $f(t) = trian_2\left[2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right] - trian_2\left[2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]$, $g(t) = \frac{1}{2}peine_1\left(\frac{t}{2}\right)$, donde $trian(t) = \begin{cases} 1-|t|, & -1 < t < 1, \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$ y

$$peine_h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nh)$$

con $h > 0$.

4. **Obligatorio cada una de sus partes.** Determine la transformada Z de la convolucíon $h = f * g$ para cada caso que se presenta a continuación:

(a) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0,1,2,3 \\ -2, & k = 4,5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k)$

(b) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0,1,2,3 \\ -2, & k = 4,5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k-4)$

(c) $f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ -2, & k = 4, 5 \\ 0, & k > 6 \end{cases}$ y $g(k) = esc(k) - esc(k-4)$

Nota: Use propiedades de la trtansformada de Laplace para responder (e) y (f) de una manera muy sencilla usando el resultado (d).

(d) Recordando que

$$\widehat{h}(z) = Z[h(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^{-k} = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + \cdots$$

y usando el hecho que generalmente $\widehat{h}(z) \in R(z)$ (una función racional)

$$\widehat{h}(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}, m \leq n$$

Para cada uno de los casos, determine $h(0), h(2)$ y $h(3)$.

5. La transformada de Laplace de una señal causal $x(t)$ es

$$\widehat{x}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 2}$$

Determinar la transformada de Laplace de las siguientes señales:

(a) $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$

(b) $y(t) = tx(t)$

(c) $y(t) = tx(t-1)$

(d) $y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + \delta(t) + 3\delta(t+1) + \delta(t-1)$

(e) $y(t) = (t-1) x(t-1) + \frac{d}{dt} x(t)$

(f) $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$

6. Un modelo que relaciona la entrada u y la salida y de un sistema P, está dado por

$$\left[\sigma^2 + 4\sigma + 3\right] y(\lambda) = u(\lambda)$$

(a) Se conoce que $y(0^-) = 0$ y $\sigma y(0^-) = 1$.
Si la entrada al sistema es

$$u(\lambda) = e^{-3\lambda} esc(\lambda)$$

(b) Determine la transformada de Laplace de la salida y cuando P es de tiempo continuo ($\lambda = t \in [0^-, +\infty)$)

(c) Determine la transformada Z de la salida cuando P es de tiempo discreto ($k \in Z_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \cdots\}$)

7. Considere la señal de tiempo continuo, $x(t)$, mostrada en la figura (**??**)

   Determine la transformada de Laplace de $x(t)$ usando el teorema de diferenciación temporal.

8. **Obligatorio cada una de sus partes.** Considere la señal de tiempo discreto

$$e(k) = r^k \cos(k\theta)\, esc(k)$$

   (exponenciaal modulada) con $r > 0$.

   (a) Demuestre que

$$\widehat{e}(z) = Z(e(k)) = \frac{z(z - r\cos(\theta))}{z^2 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

   para $|z| > r$ (ROC($\widehat{e}$). (Hay que demostrar que esa es la expresión analítica de $\widehat{e}(z)$ y que la ROC($\widehat{e}(z)$) es la dada.

   (b) Para $\theta = 45^o$ (por ejemplo), grafique (use Scilab) la señal $y(k)$ vs k para dos valores de $r > 1$, $r = 1$, dos valores de $r < 1$, y sus respectivos diagrama de polo y ceros de $\widehat{e}(z)$. Concluya. Recuerde que el disco unitario en el plano-z se define como

$$D(0,1) = \{z \in C : |z| < 1\}$$

9. **Obligatorio cada una de sus partes.**. Expanda en fracciones parciales a las siguientes funciones racionales reales en $R(\gamma)$

   (a) $h(\gamma) = \frac{2}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$

   (b) $h(\gamma) = \frac{2\gamma+1}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$

   (c) $h(\gamma) = \frac{\gamma(2\gamma+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$

   (d) $h(\gamma) = \frac{2\gamma+1}{(\gamma+1)^2(\gamma+2)}$

   (e) $h(\gamma) = \frac{2\gamma+1}{(\gamma+1)^3(\gamma+2)}$

   (f) $h(\gamma) = \frac{\omega_n^2}{\gamma[\gamma^2+2\xi\omega_n\gamma+\omega_n^2]}$
   NOTA: lea documento sobre polinomios/scilab

10. Dada una señal $g \in S_e$, está dada por $g(t) = \{e^{-5t} + 3e^{-3t}\}\, esct(t)$. Encuentre la transformada inversa de Laplace (unilateral) de las siguientes transformadas

   (a) $\widehat{g}\left(\frac{s}{3}\right)$

   (b) $\widehat{g}(s-2) + \widehat{g}(s+2)$

   (c) $\frac{\widehat{g}(s)}{s}$